

Cálculo de la probabilidad condicional y de Bayes en hoja de cálculo

Anjo, Álvaro

Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

Resumen

El cálculo de probabilidades es una de las áreas de las matemáticas que presentan más dificultades en la escuela secundaria, por lo que la existencia de una hoja de cálculo para determinar rápidamente la solución es muy atractivo. Y la hoja de cálculo tiene un comportamiento muy interesante: cuando se cambian los datos, es posible estudiar «¿qué pasaría si ?».

Se consideró la clase de problemas que afectan a la probabilidad condicional, el teorema de Bayes y la probabilidad total. La presentación de los datos y la solución debe estar en forma de diagrama de árbol, tablas de contingencia y diagramas de Venn. Este proceso de enseñanza y aprendizaje evidenció resultados muy interesantes.

Se explica la construcción de una hoja de cálculo que cumpla con los requisitos mencionados arriba, utilizando el cálculo sistemático.

Palabras clave: hojas de cálculo, diagrama de árbol, tablas de contingencia. Teorema de Bayes.

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL Y DE BAYES EN HOJA DE CÁLCULO

Anjo, Álvaro

alvaroanjo@gmail.com

Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres, 8125-254 Quarteira

INTRODUÇÃO

Um dos problemas que um professor de matemática enfrenta é determinar rapidamente uma solução que satisfaça um certo conjunto de dados. Isto permite facilmente criar problemas ou verificar as soluções dos alunos.

O cálculo de probabilidades é uma das áreas da matemática que levantam mais dificuldades no ensino básico ou secundário.

- Condições adequadas na sala de aula
- livro de matemática, por aluno
 - calculadora gráfica, por aluno
 - computador, folha de cálculo, Internet, projetor

Folha de cálculo é muito útil se permitir analisar e calcular a solução do:

- problema direto ($X \rightarrow Y$)
- problema inverso ($X \leftarrow Y$)

Conceitos e fórmulas de Probabilidades:

- probabilidade condicional,
- teoremas de Bayes,
- probabilidade Total.

Processos utilizados para resolver problemas:

- diagrama em árvore,
- tabela de contingência,
- diagrama de Venn.

Multiplicidade dos problemas.
Para estudar o problema direto e problema inverso para qualquer conjunto de dados, a folha de cálculo torna-se demasiado grande para conter todos os problemas possíveis.
Perde-se a vantagem de rapidez de introdução de

PROBLEMA-1

Exame 835, MACS, 2009, 1ª F, item 3,

Numa Escola Secundária verificou-se que 60% dos alunos de MACS são raparigas. Das raparigas, 25% são loiras, 50% têm cabelo castanho, e as restantes têm cabelo preto. Dos rapazes, 12,5% são loiros, 50% têm cabelo castanho, e os restantes têm cabelo preto.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno de MACS. Qual é a probabilidade do aluno escolhido:

1. ter cabelo loiro
2. ser rapariga, sabendo-se que tem cabelo preto.

SOLUÇÃO NO COMPUTADOR

	Calc 1	Calc 2	Calc 3	Calc 4
P(Mas)	0.6	0.6	0.6	0.6
P(Fem)	0.4	0.4	0.4	0.4
P(Loi)	0.25	0.25	0.25	0.25
P(Cas)	0.5	0.5	0.5	0.5
P(Pre)	0.25	0.25	0.25	0.25
P(Mas ∩ Loi)	0.15	0.15	0.15	0.15
P(Mas ∩ Cas)	0.3	0.3	0.3	0.3
P(Mas ∩ Pre)	0.15	0.15	0.15	0.15
P(Fem ∩ Loi)	0.05	0.05	0.05	0.05
P(Fem ∩ Cas)	0.2	0.2	0.2	0.2
P(Fem ∩ Pre)	0.15	0.15	0.15	0.15
P(Mas / Pre)	0.4	0.4	0.4	0.4
P(Fem / Pre)	0.375	0.375	0.375	0.375
P(Loi / Mas)	0.125	0.125	0.125	0.125
P(Loi / Fem)	0.25	0.25	0.25	0.25
P(Cas / Mas)	0.5	0.5	0.5	0.5
P(Cas / Fem)	0.5	0.5	0.5	0.5
P(Pre / Mas)	0.25	0.25	0.25	0.25
P(Pre / Fem)	0.25	0.25	0.25	0.25

Outras perguntas podem ser feitas sobre o problema.

CÁLCULO SISTEMÁTICO

O valor de uma incógnita é determinado logo que uma equação que relaciona aquela variável com outras variáveis é verdadeira. E o cálculo continua, sistematicamente, até determinar os restantes valores das variáveis.

Este cálculo pode ser representado por uma topologia em árvore, onde os nós representam as variáveis e os ramos apontam para variáveis dependentes.

Na prática verificou-se que 2 a 4 fórmulas por variável é suficiente para conectar algebricamente as variáveis e produzir a solução em menos de 8 iterações.

O cálculo sistemático determina a função composta (sequência de fórmulas válidas), partindo de um conjunto de variáveis não fórmulas e da lista de fórmulas por incógnita; este desempenho

FÓRMULARIO

Todas as variáveis precisam de ficar ligadas algebricamente. Não é necessário programar explicitamente funções compostas na folha de cálculo; é suficiente adicionar uma equação que complete a ligação algébrica em alguma das iterações.

FÓRMULAS GERAIS

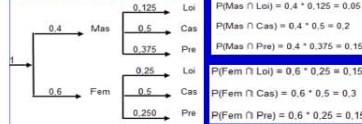
- Complemento $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- De Morgan $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$
- De Morgan $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$
- União $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Condicional $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$
- Bayes $P(B|A) = P(B) \times P(A|B) / P(A)$
- Total n var. $P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) \times P(B_i)$
- Total 2 var. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

FÓRMULAS PARTICULARES

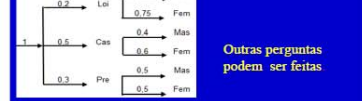
Acontecimentos independentes $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

PROBLEMA-1

SOLUÇÃO NO QUADRO



$P(\text{Loi}) = 0.05 + 0.15 = 0.20$
 $P(\text{Fem} / \text{Pre}) = 0.15 / (0.15 + 0.15) = 0.50$



PROBLEMA-2

Os conjuntos A e B apresentam as seguintes características:

$|A \cap B| = 10; |A \cap \bar{B}| = 18; |\bar{A} \cap B| = 5$

$P(A / \bar{B}) = 0.6$

1. Calcule o cardinal de A e o cardinal de B.
2. Calcule $P(\bar{B} / A)$
3. Construa o diagrama de Venn, para A e B
4. A e B representam acontecimentos independentes?

ESQUEMAS DE FÓRMULAS

Seja a equação:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 As outras equações são:
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
 $P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B)$
 $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

de igual modo para as variantes:

$\bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cup B$

PROGRAMAÇÃO DA FOLHA DE CÁLCULO

Total	S	B	C	P	E	F
45						
28						
15						
17						
30						
10						
18						
5						
12						
33						
40						
27						
35						
0.6222						
0.3333						
0.6667						
0.2222						
0.4						
0.1111						
0.2097						
0.7333						
0.8889						
0.6						
0.6667						
0.6667						
0.6						
0.3333						
0.3333						
0.4						
0.3571						
0.2941						
0.6429						
0.7059						

PROGRAMAÇÃO da CÉLULA C2:

$=SE(B2<>"", B2; SE(E(B1<>"", B4<>""), B1-B4; SE(E(B10<>"", B3<>"", B6<>""), B10+B6-B3; SE(E(B6<>"", B31<>""), B6/B31; "")))$

EXPLICAÇÃO

SE(B2<>"", B2; SE(E(B1<>"", B4<>""), B1-B4; SE(E(B10<>"", B3<>"", B6<>""), B10+B6-B3; SE(E(B6<>"", B31<>""), B6/B31; "")))

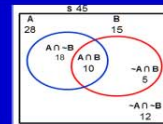
SE(B2<>"", B2; SE(E(B1<>"", B4<>""), B1-B4; SE(E(B10<>"", B3<>"", B6<>""), B10+B6-B3; SE(E(B6<>"", B31<>""), B6/B31; "")))

PROBLEMA-2

SOLUÇÃO

Ver tabela acima

Diagrama de Venn



Condição	$P(A \cap B) = 0$	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
	$P(A \cup B) = 1$	$P(A) = P(A \cap B)$
	$P(A \cap B) > 0$	$P(B) = P(B \cap A)$
A, B	Condição	Compatível
	Não	Incompatível
	Não	Não

CONCLUSÃO

Este processo de ensino-aprendizagem têm-se mostrado muito eficaz. Os alunos estão motivados e gostam de aprender. Os resultados escolares estão acima da média