Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas

José Marcos Lopes

Universidad Estatal Paulista

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica-pedagógica para la enseñanza del Teorema de Bayes en la cual se emplea un juego de dados (original) asociado con la resolución de problemas. La resolución de problemas es utilizada como punto de partida para la construcción de los conceptos matemáticos. El juego propuesto se fundamenta en *Game of Kasje,* presentado originalmente en (Schuh, 1968). A través del uso de este juego se formulan varios problemas, que al ser resueltos con una adecuada intervención del profesor, permiten estimular a los alumnos en la construcción y/o reconstrucción de todos los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, en particular, el estudio del Teorema de Bayes. La estrategia propuesta puede ser aplicada en la escuela secundaria, y también puede auxiliar en la práctica de profesores que enseñan esos conceptos matemáticos.

Palabras clave: Teorema de Bayes, probabilidad, juegos, resolución de problemas, enseñanza de matemática.

1. Introducción

La probabilidad es una rama de la matemática que trata sobre el estudio y modelación de fenómenos aleatorios o no determinísticos. Por fenómeno aleatorio se entiende como el suceso (o evento) que al ser repetido sobre condiciones idénticas puede generar resultados diferentes.

Consideramos que existen dos objetivos, no completamente separados, para el estudio de la probabilidad en la enseñanza secundaria. Primero: la probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas (Batanero, 2006). Y, segundo: la probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998).

La probabilidad debe ser vista como un conjunto de ideas y procedimientos que permiten aplicar la matemática en casos de la vida real y que puede cuantificar e identificar conjuntos de datos o informaciones que no pueden ser cuantificadas en forma directa o exacta. Como ejemplo se pueden mencionar: la climatología, los juegos de lotería, el contrato de un seguro, entre otros. Como señala Batanero (2006), bajo estas circunstancias la probabilidad no es una propiedad física tangible y por lo tanto objetiva a los sucesos que lo rodean (como son: el color, peso, superficie, temperatura), sino que se convierte en una percepción o grado de aceptación de lo verosímil de la persona que asigna la probabilidad de ocurrencia del suceso (que puede ocurrir, o no).

Según Díaz y La Fuente (2006) "El razonamiento sobre probabilidad condicional inversa y su cálculo usando el Teorema de Bayes tiene una gran importancia en el diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y aplicación de la inferencia estadística".

Los contenidos de la probabilidad son considerados difíciles tanto por los alumnos de escuela secundaria como por muchos profesores. Corbalán (2002) señala que:

> El esfuerzo por encontrar propuestas atractivas tiene que ser mayor en los casos en que la materia a estudiar sea más ardua, por el motivo que sea (abstracción, dificultad, alejamiento de la práctica diaria, ...). Por dar un ejemplo, todo lo relativo a la asignación de probabilidades es

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 601-608). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

> de una gran dificultad para el alumnado de secundaria, por motivos intrínsecos y porque en general no lo han visto hasta esa edad. Por ello habrá que hacer un gran esfuerzo para presentar de forma lúdica el tema (p. 15).

En este artículo usamos un juego de dados y la resolución de problemas para la enseñanza de los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad.

2. Aspectos sobre el uso de juegos y de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática

Muchos autores han destacado la importancia de implementar los juegos en la enseñanza, particularmente en el área de las matemáticas. Las contribuciones realizadas por teóricos como Piaget y Vigotsky justifican el surgimiento de propuestas pedagógicas en que el juego es concebido para favorecer el aprendizaje del alumno. Dentro de esa metodología de aprendizaje existe la necesidad de la participación activa del alumno en la construcción de su propio conocimiento (Kamii & DeVries, 1980; Corbalán, 2002).

Corbalán (2002) considera que el mejor empleo que se puede dar a los juegos en las clases de matemáticas sería crear todos los días, sea cual sea el tópico que se trate, un ambiente lúdico.

> Tener como norte que no hay aventura más apasionante que la del descubrimiento y que no hay mejor manera de disfrutarla que por medio de la tensión que produce la competencia lúdica. Que incluso lo más sesudo y abstruso puede presentarse como un enigma a descubrir, con la satisfacción que produce (p. 13).

Para ser útil en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, un buen juego debe proponer algo interesante y desafiante para los alumnos, permitir que realizen una autoevaluación de su desempeño, y garantizar una participación activa de los jugadores en el juego, de inicio a fin (Kamii & De Vries, 1980). Por otro lado Corbalán (2002) describe que un buen juego debe tener dos características básicas: poseer pocas reglas y durar poco tiempo.

Los juegos pueden ser utilizados para la construcción de los conceptos matemáticos siempre que exista una intencionalidad y un buen planeamiento de las actividades que rodean el juego. Pueden ser requeridas varias sesiones de clase, y los conceptos matemáticos alrededor del juego pueden ser explorados a través de situaciones-problema.

Considerándose el constructivismo de Piaget, el profesor debe tomar decisiones de acuerdo con la manera que el alumno piensa y siente en cada situación. El profesor debe elegir la forma de modificar o inventar nuevos juegos. Al igual que cada alumno necesita reinventar el conocimiento para hacerlo suyo, cada profesor necesita construir su propia forma de trabajar los juegos para la enseñanza de la matemática (Kamii & De Vries, 1980).

Para la enseñanza de la probabilidad, Corbalán (2002) sugiere el uso de juegos pré-instruccionales, o sea, aquellos que se utilizan previamente a la adquisición de los conceptos o procedimientos.

> Supongamos que estamos en el proceso de introducir um concepto especialmente complicado para nuestros alumnos: la probabilidad. Es conveniente (casi se puede asegurar que prácticamente necesario) realizar toda una bateria de actividades antes de poder pasar a cualquier tipo de definición o de formalización, aunque no sea muy precisa o rigurosa. En ese núcleo es muy recomendable introducir juegos (pp. 34-35).

La resolución de problemas debe ser considerada como la principal estrategia para la enseñanza de la matemática. Tal como considera Van de Walle (2007), "las evidencias tienden a mostrar que la resolución de problemas es una poderosa y eficaz herramienta para el aprendizaje. Los alumnos resuelven problemas, no para aplicar la matemática, sino para aprender una nueva matemática" (p. 37).

Existen diferentes interpretaciones y diferentes formas de abordar la resolución de problemas. Según lo expuesto por Schroeder y Lester Jr. (1989), existen tres interpretaciones para el uso de la resolución de problemas:

> Primera. Enseñar sobre la resolución de problemas: el profesor trabaja con alguna variante del modelo de resolución de problemas de Polya.
> Segunda. Enseñar a resolver problemas: el profesor se concentra en la forma en que la matemática es enseñada y en lo que puede ser aplicado.
> Tercera. Enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas: la resolución de problemas se convierte en una metodología de enseñanza, como un punto de partida y un medio de enseñar matemática. El problema es visto como un elemento que puede potenciar un proceso de construcción de conocimiento. Los problemas son propuestos de modo que contribuyan a la formación de los conceptos antes de la presentación formal en un lenguaje matemático (pp. 31-34).

Cuando se pretende enseñar Matemática a través de la resolución de problemas, el problema debe ser cuidadosamente seleccionado, y servirá como un elemento para potenciar el proceso de construcción de conocimiento. Igualmente deberá contribuir en la formación de los conceptos que se pretenden estudiar, aún antes de la presentación en el lenguaje matemático formal. El foco está en la acción por parte de los alumnos. Como señala Batanero (2001),

> el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo del matemático profesional: En lugar de 'inventar' métodos matemáticos adecuados para resolver problemas, debe 'inventar' problemas interesantes que conduzcan a un cierto conocimiento matemático. Esta formulación del aprendizaje matemático se corresponde con las teorias constructivistas, ampliamente asumidas" (p. 124).

En la enseñanza tradicional de probabilidad, el profesor presenta definiciones, fórmulas y propiedades, para después resolver ejercicios utilizando tales conceptos. Todo se realiza de una forma descontextualizada y, por lo tanto, los alumnos no alcanzan a percibir el surgimiento de estas fórmulas y acaban por mitificar la Matemática. Creemos que esa forma de enseñar puede contribuir para la falta de comprensión de este importante contenido matemático.

3. El juego

Este juego utiliza dos dados, y es disputado por dos jugadores, Juan y María. Son considerados casos vencedores

(4; 1) o (1; 4) vale 1 punto;	(4; 2) o (2; 4) vale 2 puntos;
(4; 3) o (3; 4) vale 3 puntos;	(4; 4) vale 4 puntos;
(4; 5) o (5; 4) vale 5 puntos;	(4; 6) o (6; 4) vale 6 puntos.

Cada participante podrá realizar hasta dos lanzamientos. Si en el primer lanzamiento el participante no consigue obtener una cara 4 entonces se realizará un segundo lanzamiento con los dos dados. Si en el primer lanzamiento aparece en alguno de los dados una cara con 4, se resguarda este dado y se decide si se lanza o no el otro dado más una vez. Gana el juego el participante que obtenga la mayor puntuación. Cuando los dos jugadores obtengan la misma puntuación entonces se realizará una nueva partida.

Comentarios sobre el juego

El juego propuesto en este artículo está basado en *Game of Kasje* (Schuh, 1968). Como el juego utiliza dados entonces el factor suerte no puede ser totalmente despreciado. También es imposible la determinación de una estrategia siempre victoriosa. De este modo el juego nunca pierde sentido, y cada partida será probablemente diferente al anterior. Las reglas del juego poseen intrínsicamente nociones de probabilidad, por lo que cada participante deberá establecer, en cada jugada, su mejor estrategia para aumentar sus posibilidades de victoria. Siguiendo las definiciones presentadas por Corbalán (2002), se puede afirmar que el juego propuesto en éste artículo une el conocimiento, la estrategia y el azar.

Se supone para este juego la utilización de dados libres de sesgo, es decir, que cada lado posee igual probabilidad de aparecer (lados equiprobables). Juan es quien realiza primero sus lanzamientos. En el caso que Juan consiga (4; 1) o (1; 4), o sea, 1 punto en el primer lanzamiento, entonces él deberá lanzar el segundo dado una vez más. Pues no es posible disminuir su puntuación. Ahora, si Juan obtiene 3 puntos, con (4; 3) o (3; 4) en su primer lanzamiento, y decide lanzar el segundo dado, él tendrá una oportunidad entre 6 de permanecer con la misma puntuación (es decir, obtener un 3 en el lanzamiento del segundo dado), dos oportunidades en 6 de disminuir su puntuación (es decir, obtener 1 ó 2 en el lanzamiento del segundo dado) y tres oportunidades en 6 de mejorar su puntaje (o sea, sacar un 4, 5 ó 6 en el lanzamiento del segundo dado).

Se puede presentar el caso en que un jugador no marque puntos. Esto ocurre cuando no obtiene un lado 4 en sus dos oportunidades de lanzamiento.

Como Juan es quien realiza primero sus lanzamientos, María estará en mejor posición para aprovechar o no su segundo lanzamiento, ya que conoce de antemano la puntuación obtenida por Juan. Por tal motivo, para hacer que el juego sea más justo se deben realizar varias partidas en las cuales se alterna el participante que realiza sus primeros lanzamientos.

4. Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

Desde esta sección se asume que los alumnos ya han estudiado los conceptos de Experimento Aleatorio, Suceso, Definición de Probabilidad (Laplace) y Probabilidad Condicional. Asumimos también para Juan la seguinte estrategia.

Estrategia de Juan: Si en el primer lanzamiento se obtiene 1, 2 ó 3 puntos, entonces él realiza el segundo lanzamiento con un solo dado para conseguir mejorar su puntuación. Dado el caso que Juan obtenga 4, 5 ó 6 puntos en el primer lanzamiento, él para. Si él no consigue ningún punto en el primer lanzamiento, lanza de nuevo los dos dados.

Inicialmente, todos los alumnos deberán participar del juego. El objetivo de esta acción es hacer que ellos adquieran pleno conocimiento y dominio de sus reglas. Después de realizado el juego, el profesor puede hacer las siguientes preguntas.

- ¿El jugador siempre debe aprovechar el segundo lanzamiento?
- ¿El segundo jugador tiene mayor posibilidad de vencer?

En ese momento, los alumnos responderán estas preguntas a través de la intuición y por la experiencia adquirida en las partidas jugadas. Al final del trabajo, después de la resolución de los problemas propuestos, y los conceptos probabilísticos estudiados, se espera que los alumnos consigan justificar matemáticamente las preguntas hechas, y calcular las probabilidades de victoria de cada jugador; Juan y María.

Los alumnos deben usar su lenguaje propio en las soluciones de los problemas. El profesor escoge uno de los grupos para dar su respuesta. Posteriormente, se discutirán las respuestas ciertas y erradas presentadas por los otros grupos en una pequeña plenaria. Después de la presentación de los problemas será realizada, por el profesor, la sistematización de las ideas o contenido matemático a través del rigor y de los formalismos característicos de la matemática. En este momento se presentan definiciones y propiedades del tema estudiado. Después de la sistematización del concepto matemático el profesor trabaja con los alumnos, en grupo o individualmente, la respuesta de varios ejercicios vinculando los conceptos estudiados. Los ejercicios (problemas) también pueden involucrar situaciones del juego que hayan sido encontrados y seleccionados del libro didáctico. Las respuestas para estos ejercicios serán obtenidas a través del empleo de las definiciones, propiedades, lemas y teoremas, anteriormente sistematizadas en el salón de clase. Es necesario que el profesor refuerce el uso de terminologías nuevas propias del asunto. El objetivo principal de esta acción es hacer que los alumnos interioricen los temas estudiados y se refuerce el desarrollo de actitudes y habilidades en la resolución de problemas. En este momento se estará enseñando a los alumnos a resolver problemas.

Problema 1. ¿Cuál es la probabilidad de Juan marcar 1 punto en este juego?

Comentarios y sugerencias: Para Juan marcar un punto y teniendo en cuenta la estrategia adoptada, se debe considerar los siguientes casos:

(i) Juan obtiene 0 puntos en el primer lanzamiento y obtiene 1 punto en el segundo lanzamiento de los dos dados. En este caso se tiene la probabilidad,

$$p_1 = \frac{25}{36} \text{ x } \frac{2}{36} = 0.0385802$$

(ii) (Juan obtiene 1, 2 ó 3 puntos en el primer lanzamiento, y el lado 1 en el lanzamiento del segundo dado. En este caso se tiene la probabilidad,

$$p_2 = \frac{6}{36} \text{ x } \frac{1}{6} = 0.0277778$$

Entonces la probabilidad de Juan marcar 1 punto será dada por:

$$p = p_1 + p_2 = 0{,}066358 \equiv 6{,}63\,\%.$$

Se debe observar que cuando en el primer lanzamiento Juan obtiene 4, 5 ó 6 puntos, entonces el juego es suspendido y en este caso él no puede marcar solo 1 punto. Por tal motivo no se considera en la solución del *problema 1*, los casos en que Juan obtenga 4, 5 ó 6 puntos en su primer lanzamiento. El objetivo de este problema es estudiar los conceptos de suma y producto de probabilidad. En el cálculo de las posibilidades p_1 y p_2, el profesor debe destacar la existencia de dos exigencias que deben ser cumplidas, y destacar el papel de la "**y**", por eso se multiplica. Ahora, para el cálculo de la probabilidad p de Juan marcar 1 punto, se debe destacar el papel del "**o**". Para este caso puede ocurrir una situación o otra que mismo así Juan continúa marcando 1 punto, y por ese motivo sumamos.

De manera análoga al *problema 1*, se puede mostrar que la probabilidad de Juan marcar 2 puntos, que es igual a la probabilidad de marcar 3 puntos, es dada por p = 0.0663579 ≡ 6.63%. La probabilidad de Juan marcar 4 puntos es dada por $p = 0.0748455 \equiv 7.48\,\%$. Y, la probabilidad de Juan marcar 0 punto es $p = \frac{25}{36} \text{ x } \frac{25}{36} \equiv 48.22\,\%$.

Problema 2. ¿Cuál es la probabilidad de Juan marcar 5 puntos en este juego?

Comentarios y sugerencias: Definimos los siguientes sucesos:

B = {Juan marcó 5 puntos en el juego};

A_1 = {Juan obtuvo 0 puntos en el primer lanzamiento};

A_2 = {Juan obtuvo 1 punto en el primer lanzamiento};

A_3 = {Juan obtuvo 2 puntos en el primer lanzamiento};

A_4 = {Juan obtuvo 3 puntos en el primer lanzamiento};

A_5 = {Juan obtuvo 5 puntos en el primer lanzamiento}.

Así, $P(B) = [(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)]$.

Como los sucesos $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, $(B \cap A_3)$, $(B \cap A_4)$ *y* $(B \cap A_5)$ son mutuamente excluyentes, tenemos que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5).$$

Ahora, usando la definición de Probabilidad Condicional obtendremos:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3) + P(A_4).P(B|A_4) + P(A_5).P(B|A_5)$$

$$= \frac{25}{36} \text{ x } \frac{2}{36} + \frac{2}{36} \text{ x } \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \text{ x } \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \text{ x } \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \text{ x } 1 = 0.1219133 \equiv 12.19\%.$$

Se observa que $P(B|A_5) = 1$, ya que Juan no utilizará su segundo lanzamiento si obtiene 5 puntos en el primer lanzamiento. De manera análoga al *problema 2*, se puede mostrar que la probabilidad de Juan marcar 6 puntos es dada por p = 0.1219133 ≡ 12.19 %. Así, Juan tiene la misma probabilidad de marcar 5 ó 6 puntos. Se tiene que la suma de las probabilidades de Juan marcar 1, 2, ..., 6 puntos, y de no marcar ningún punto es igual a 1.

Después de trabajar con problemas como los presentados anteriormente, puede resultar más fácil para el profesor sistematizar el siguiente teorema.

Teorema de la Probabilidad Total. Sea B un suceso para el cual se conocen las probabilidades condicionadas $P(B|A_i)$ para i = 1, ... , n. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n sucesos mutuamente excluyentes que forman un sistema exhaustivo; es decir que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ *y* $P(A_i) > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \ldots + P(A_n).P(B|A_n).$$

El siguiente problema tiene por objetivo el uso del Teorema de la Probabilidad Total y también el concepto de Probabilidad Condicional.

Problema 3. ¿Cuál es la probabilidad de Juan obtener 0 puntos en el primer lanzamiento sabiendo que Juan marcó 5 puntos en el juego?

Comentarios y sugerencias: Sí se consideran los mismos sucesos como definidos para la solución del *problema 2*, debemos calcular $P(A_1|B)$. Así

$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{25}{36} \text{ x } \frac{2}{36}}{0.1219133} = 0.3164564 \equiv 31.64\%.$$

Las dos primeras igualdades de la relación anterior, siguen directamente de la definición de probabilidad condicional y $P(B)$ = 0.1219133, ya fue calculada en el *problema 2*. Para el desarrollo del *problema 3* utilizamos el siguiente e importante teorema.

Teorema de Bayes. Con las mismas condiciones del teorema de la Probabilidad Total, si $P(B) > 0$ entonces,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \ldots + P(A_n).P(B|A_n)}$$

para i, i = 1, 2, ... , n.

Cuando María realiza sus lanzamientos, su posibilidad de victoria está condicionada a los puntos que Juan obtuvo a priori. Teniendo en cuenta que María realizó su juego después de Juan, María adoptaría la siguiente estrategia.

Estrategia de María: Si en su primer lanzamiento María obtiene una puntuación mayor que la de Juan, el juego termina con la victoria de María. Si obtiene una puntuación menor que la de Juan en su primer lanzamiento, ella utiliza su segundo lanzamiento. Ahora, de haber un empate con Juan, en el primer lanzamiento, María utilizará su segundo lanzamiento en el caso de que Juan haya obtenido 3 puntos o menos.

Teniendo en cuenta la estrategia adoptada, puede demostrarse que la probabilidad de María ganar este juego es $p \equiv 36.25$ %, la probabilidad de que María pierda es $p \equiv 35.60$ % y para empatar es $p \equiv 28.15$ %.

Se puede concluir que la probabilidad de María vencer el juego es ligeramente mayor que la probabilidad de perder. El segundo jugador está en mejor situación, ya que conoce la puntuación obtenida por su adversario.

5. Consideraciones finales

Todos los problemas elaborados reflejan situaciones del juego. El empleo del juego no solo es para motivar los alumnos, también se está utilizando como un desencadenador de aprendizaje. Las situaciones-problema que se representan en este artículo son originales y fueron formuladas con el fin de contemplar en sus resoluciones conceptos de probabilidad.

Lo que se busca con estas herramientas es un desarrollo de raciocinio deductivo del alumno y no la memorización de fórmulas. La memorización puede ser temporal, mientras que el raciocinio y el conocimiento adquirido son para toda la vida.

La metodología de trabajo con juegos y resolución de problemas sugerida en este artículo sigue la tendencia constructiva de la enseñanza y el aprendizaje en la Matemática. El alumno se convierte en el constructor de su propio conocimiento, mientras que el profesor se convierte en un mediador que incentiva y facilita el aprendizaje, interviniendo y polemizando.

No existe un único y mejor camino para enseñar matemática. El profesor debe conocer varias alternativas de trabajo, para así ofrecer en cada tópico, un proyecto didáctico-pedagógico eficaz que sea llamativo para sus alumnos.

El trabajo con contenidos de probabilidad es considerado difícil por muchos profesores. Así la principal contribución que se pretende ofrecer con este trabajo es una forma de enseñanza diferente, no contemplada en los libros didácticos, y que puede auxiliar y colaborar con la práctica en sala de clase de los profesores que enseñan los conceptos iniciales de probabilidad.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. Flores; J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales, CD ROM.

Bennet, D. J. (1998). *Randomness*. New York: Cambridge University Press.

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Díaz, C. y de La Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores; J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM.

Kamii, C. y DeVries. R. (1980). *Group games in early education: Implications of Piaget's theory*. Washington: National Association for the Education of Young Children.

Schoroeder, T. L.; Lester Jr. F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton; A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, (Year Book).

Schuh, F. (1968). *The master book of mathematical recreations*. New York: Dover Publications, Inc.

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (6th ed.). Boston: Pearson.