

Razonamiento Combinatorio y el currículo español

Fernández Millán, Elena

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos las ideas principales relacionadas con la importancia de la enseñanza-aprendizaje de la Combinatoria, que se encuentran presentes en las investigaciones y trabajos realizados en la Universidad de Granada, así como el estado actual del currículo español en dicho campo.

La intención de este trabajo es mostrar algunas de las ideas que justifican la necesidad de la presencia de la Combinatoria en las aulas y compararlo con las directrices que marca el currículo español en las etapas de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato.

El trabajo se estructura en dos apartados fundamentales, en el primero hacemos una revisión de algunos de los trabajos e investigaciones llevadas a cabo en la Universidad de Granada relativos al Razonamiento Combinatorio y describimos las ideas principales que hacen referencia al mismo. En la segunda parte presentamos las directrices que marca el currículo español relativas a este campo y mencionamos también las recomendaciones de los Estándares del NCTM, con el objetivo de hacer una comparación entre lo establecido en ambas directrices y relacionarlo con las ideas extraídas de las investigaciones.

Palabras clave: currículo, bloque de contenidos, Combinatoria, Razonamiento Combinatorio

1. Introducción

El interés por las matemáticas en España comienza en la década de los 60, y es una década más tarde cuando la disciplina Didáctica de la Matemática se incorpora a la universidad Española, aun así, encuentra diversas dificultades y hasta avanzada la década de los 80 no comienza a desarrollarse realmente.

El departamento de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada se encuentra estructurado en diversas líneas de investigación, entre las que se encuentra Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Dentro de esta línea de investigación se encuentra Didáctica de la Combinatoria, bajo la cual se han llevado a cabo diversos trabajos de investigación relacionados con esta disciplina.

Si comparamos el volumen y el avance de las investigaciones llevadas a cabo relativas a la Didáctica de la Combinatoria con las de otras áreas de la Didáctica de la Matemática, se pueden observar que las primeras han recibido escasa atención. A pesar de que las dificultades de la combinatoria son bien conocidas por los profesores que tratan de enseñar el tema en el nivel de secundaria (Roa, 2000).

Con este trabajo pretendemos destacar algunas de las principales ideas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la combinatoria, puestas de manifiesto en algunos de los trabajos realizados por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y posteriormente analizar el estado actual del currículo español, así como las menciones al respecto en los estándares americanos del NCTM 2010.

2. ¿Qué es la Combinatoria?

En el libro escrito en el Departamento de Didáctica de la Matemática *Razonamiento combinatorio* de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, ya se pone de manifiesto la dificultad de dar una definición de Combinatoria que incluya todos sus campos de aplicación. Según ellos, una descripción magistral de las características e importancia de la Combinatoria es la proporcionada por James Bernoulli, quién escribía en su *Ars Conjectandi*: “Es fácil darse cuenta de que la prodigiosa variedad que se presenta, tanto en las obras de la Naturaleza como en las acciones humanas, y que constituye la mayor parte de la belleza del universo, es debida a la multitud de modos diferentes en los cuales sus diversas partes pueden mezclarse o yuxtaponerse. Pero, debido a que el número de causas que concurren en la producción de un acontecimiento dado o efecto es muy a menudo tan enormemente grande y las causas mismas son tan diferentes entre sí, es extremadamente difícil enumerar todos los modos diferentes en los cuales pueden ordenarse o combinarse, y a menudo ocurre que los hombres, aún de la mayor capacidad y de la más grande circunspección caen en la falta de razonamiento que los autores de libros de Lógica llaman enumeración insuficiente o imperfecta de partes o casos. Y esto sucede en tal medida, que me atrevo a afirmar que ésta es la principal, casi diría la única fuente del enorme número de opiniones erróneas en asuntos, muy frecuentemente, de gran importancia”.

Debe reconocerse, por lo tanto, que el arte que procura eliminar esta debilidad y nos enseña a enumerar todos los modos posibles en un número dado de objetos pueden mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles debe considerarse de una enorme utilidad y merece nuestra más alta estima y profunda atención. Este es el objeto de la Combinatoria que no debe ser considerada sólo como una rama de las ciencias matemáticas, pues está relacionada con casi todas las formas de conocimientos útiles en las cuales la mente humana puede emplearse” (citado por Stanley, 1946, p. 158), (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p.17)

3. Razonamiento combinatorio y pensamiento formal

En diferentes trabajos realizados sobre combinatoria, se tienen en cuenta las reflexiones e investigaciones realizadas en el campo de la psicología en las que se pone de manifiesto la influencia del razonamiento combinatorio en el desarrollo formal.

Haciendo un breve resumen de dichas investigaciones sobre el desarrollo cognitivo de la capacidad combinatoria podemos destacar las siguientes ideas que justifican la importancia de la materia en cuestión en las aulas en diferentes niveles escolares.

Piaget e Inhelder (1951) tratan de determinar el papel de los esquemas combinatorios en la formación de ideas de azar y probabilidad. Una de las razones es que si los sujetos no poseen capacidad de análisis combinatorio, el concepto de probabilidad (en el sentido laplaciano) se puede usar sólo en casos muy restringidos, en los cuales se pueden enumerar directamente los resultados posibles que constituyen el espacio muestral, (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994. p.67). Lo cual señala la importancia de la combinatoria para el cálculo de probabilidades.

Inhelder y Piaget (1955) consideran la capacidad combinatoria como un constituyente fundamental del razonamiento formal. Ante hechos que el adolescente tiene que explicar mediante una lógica proposicional, combina las relaciones cualitativas entre estos hechos según todas las combinaciones que le son accesibles y, sin saberlo, alcanza un esquema completo de las combinaciones entre estas relaciones; a veces incluso se precisa una enumeración referida a las permutaciones entre ellas, (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo 1994. p.67). Por lo tanto los adolescentes podrían hacer espontáneamente operaciones combinatorias y resolver problemas de este tipo sin instrucción.

Por su parte, Fischbein, en el prólogo del libro de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) afirma que, “El Análisis Combinatorio, con sus conceptos y métodos no representa, por tanto, solamente un dominio definido de la matemática. Expresa, como he dicho, un esquema operacional, (en la terminología Piagetiana), ¡un prerrequisito estructural importante para la dinámica y potencia creativa del razonamiento lógico en general!” (Roa, 2000)

Fischbein realizó una serie de investigaciones relativas al efecto de la instrucción en el desarrollo cognitivo. En Fischbein (1975) se pone de manifiesto que las operaciones combinatorias representan algo más importante que una rama de las matemáticas. Representan un esquema con un carácter tan general como los esquemas de proporcionalidad y la correlación, que emergen simultáneamente después de la edad de los 12-12 años”. A partir de las conclusiones que él obtuvo sobre los trabajos de Piaget e Inhelder, se interesó por el estudio del efecto de la instrucción sobre el desarrollo de la capacidad combinatoria en sujetos de 10 a 15 años y también analiza el papel de los diagramas de árbol en la aceleración del desarrollo hacia niveles cognitivos superiores.

Fischbein (1987) concede una gran importancia a la intuición como parte integrante de la conducta inteligente. Considera que la introducción en el currículum escolar de una materia debe ir precedida de una detallada investigación acerca del sustrato intuitivo que los alumnos poseen respecto a la misma, de igual modo que es preciso estudiar el terreno sobre el que va a construirse un edificio. El autor diferencia entre intuiciones primarias y secundarias. Las intuiciones primarias son adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin ninguna necesidad de instrucción sistemática. Por el contrario, las intuiciones secundarias consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, especialmente en la escuela. (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994. p. 71).

Como conclusión de las investigaciones de Fischbein y colaboradores dedicadas al papel de la instrucción se puede concluir con que las técnicas combinatorias no son adquiridas espontáneamente y que por lo tanto la instrucción es necesaria y que incluso al nivel de las operaciones concretas es posible inducir en los niños la asimilación de técnicas combinatorias, así como la constitución de nuevas intuiciones secundarias. (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994. p.73).

Fischbein (1975) mostró que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza en el nivel de las operaciones formales cuando los sujetos no reciben enseñanza sobre tales procesos. Asimismo, otros autores han sugerido que la edad media de acceso al estadio de pensamiento formal es sustancialmente diferente al indicado por Piaget e Inhelder (1951), y que incluso un número importante de sujetos no alcanzan nunca dicho estadio. Incluso Piaget cambió su primera concepción sobre el desarrollo del pensamiento formal y amplió hasta la edad de 15-20 años para dicho logro, sugiriendo además la influencia crucial del entorno y de las capacidades y especialización profesional del sujeto en la construcción de la estructura de las operaciones formales. El hecho es que numerosas investigaciones muestran que con frecuencia los sujetos adultos presentan sesgos en su razonamiento probabilístico, que son consecuencia de un razonamiento combinatorio deficiente (Roa, 2000).

4. Razones para enseñar combinatoria

En *Razonamiento combinatorio* de M. Carmen Batanero, Juan Díaz Godino, Virginia Navarro-Pelayo, se pone de manifiesto que “creemos que uno de los problemas de la enseñanza de la Combinatoria en los niveles medios, de los que tradicionalmente ha formado parte, es precisamente su tratamiento aislado del resto de los contenidos y problemas matemáticos”

La dificultad del tópico Combinatoria es reconocida por los propios profesores como se indica en Navarro-Pelayo (1991). Se plantea así la pregunta de si la enseñanza de la Combinatoria debería retrasarse. A pesar de que las conclusiones de los trabajos de Fischbein no son completamente efectivas, responden negativamente a esta pregunta. Este autor ya ha señalado la importancia de cultivar la intuición matemática desde niño y el hecho de que la intuición combinatoria no se desarrolla espontáneamente. Otras teorías cognitivas del aprendizaje, como la de Vigotsky, reclaman una atención preferente a la instrucción como recurso para promover el desarrollo cognitivo de los alumnos. Retrasar, por tanto, la enseñanza de la Combinatoria, o sea, no cultivar el razonamiento combinatorio cuando los alumnos puedan estar en condiciones adecuadas para ello, puede suponer una seria limitación en el desarrollo de su pensamiento formal (Roa, 2000).

En el libro mencionado al comienzo de este apartado se señalan una serie de razones expuestas por Kapur (1970), a favor de la enseñanza de la combinatoria en secundaria:

- Dado que no depende del cálculo complicado, puede ser iniciada en una etapa muy temprana; de hecho permite plantear problemas para todos los niveles educativos.
- Permite dar oportunidades a los estudiantes de realizar actividades características de matematización: hacer conjeturas, generalización, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, etc.
- Se proporcionan oportunidades de distinguir entre demostraciones rigurosas y plausibles.
- Pueden proponerse gran variedad de campos de aplicación, tanto internas a la propia matemática como externas: física, química, biología, análisis de redes, diseño de experimentos, teoría de comunicación, probabilidad, programación dinámica, teoría de números, topología, matemática recreativa etc.
- Se pueden proponer problemas desafiantes, algunos no resueltos aun, aunque al alcance de la comprensión de los estudiantes. Ello permite que aprecien la necesidad de creación de nuevas matemáticas. Puesto que muchos problemas y aplicaciones de la Combinatoria se han desarrollado recientemente puede mostrar la naturaleza dinámica de esta ciencia.
- Al crear la costumbre de examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor alternativa, contribuye al desarrollo del pensamiento sistemático.
- Puede contribuir a dar sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, funciones, isomorfismo, etc.

5. Presencia de la Combinatoria en el currículo actual

A pesar de las conclusiones expuestas de las investigaciones realizadas hasta el momento, en las que se exponen resultados de teorías del desarrollo cognitivo y de las razones expuestas por Kapur para la presencia de la Combinatoria en las aulas, al analizar el currículo español, observamos que su presencia no está muy acorde con lo dichos resultados.

Revisamos en este trabajo el currículo español así como el de la Comunidad Autónoma de Andalucía, en los cuales, como se mostrará a continuación la rama de Combinatoria no aparece de forma explícita.

La etapa de educación Primaria, que abarca de los 6 a los 12 años se divide en tres ciclos.

En el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria se integra el bloque de contenidos 4. Tratamiento de la información azar y probabilidad, dentro del mismo, en el tercer ciclo, aparecen entre otros los contenidos: “Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso” (p. 43101)

Para estimar el grado de probabilidad de un suceso, en cierta medida y aplicando la regla de Laplace, es necesario conocer el número de casos totales, con lo que indirectamente

estaría relacionado con la Combinatoria. Si bien es cierto que el número de casos totales para el cálculo de probabilidades en la etapa de educación primaria pueden no requerir el empleo de la Combinatoria para su recuento ya que se trata de probabilidades sencillas.

En la orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación primaria en Andalucía, dentro del apartado Relevancia y sentido educativo, se establece que:

se aprende matemáticas porque son útiles e incluso imprescindibles para la vida cotidiana y para el desarrollo de las actividades profesionales y de todo tipo; porque nos ayudan a comprender la realidad que nos rodea; y también, porque su aprendizaje contribuye a la formación intelectual general potenciando las capacidades cognitivas de niños y niñas (p.18)

Lo cual también se encuentra reflejado en el Real Decreto mencionado anteriormente y que de forma indirecta podría hacer referencia a la combinatoria. En la misma orden, dentro de núcleo temático 6. Tratamiento de la información, azar y probabilidad encontramos:

Abordar tareas como la planificación para la recogida de la información; utilizar técnicas de recuento y de manipulación de los datos, así como la forma para agruparlos, son tan importantes como los cálculos que con ellos pueda realizarse (p. 22)

Donde dentro de las técnicas de recuento juega un importante papel la combinatoria.

La etapa de educación Secundaria, que abarca de los 12 a los 16 años, se divide en cuatro cursos. En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria se encuentra el bloque de contenidos 6. Estadística y probabilidad, en el tercer curso nos encontramos con los contenidos:

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos (p. 756)

En el cuarto curso, que se divide en dos opciones, A y B nos encontramos con los siguientes contenidos:

Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.(p. 758-759)

Como comentamos en el caso de la etapa de educación primaria, siempre que tengamos en cuenta el cálculo de probabilidades, en el sentido laplaciano, hay que considerar el número de casos totales, lo que precisa de técnicas de recuento en el caso de que no sean casos excesivamente sencillos. Por lo que encontramos la presencia de la combinatoria en estos contenidos.

En la orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación secundaria en Andalucía nos encontramos con el núcleo temático 6. Interpretación de fenómenos ambientales y sociales a través de las funciones y sus gráficos y de las estadísticas y probabilidad donde aparece:

Abordar cuestiones de planificación para la recogida de la información, utilizar técnicas de recuento y manipulación de los datos, así como estudiar la forma para agruparlos, son tareas importantes como los cálculos que con ellos puedan realizarse y su posterior interpretación (p. 55)

Donde al igual que en la etapa de primaria, las técnicas de recuento están relacionadas con la combinatoria.

En la etapa de Bachillerato, las enseñanzas están reguladas en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Esta etapa se divide en dos cursos y la materia de matemáticas en dos ramas, matemáticas y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

En la rama de matemáticas, el bloque de contenidos 4. Estadística y Probabilidad solamente se encuentra en el primer curso de bachillerato, y no se menciona de forma explícita ningún contenido de combinatoria; si se refleja de alguna forma en “estudio de la probabilidad compuesta, condicionada y a posteriori”.

En la rama de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, el bloque de contenidos 3. Probabilidad y estadística, ni en el primer ni en el segundo curso se muestra tampoco ningún contenido de Combinatoria, aunque sí, como he mencionado anteriormente en “Asignación de probabilidades a Sucesos” (p.45475), en el primer curso y “Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes” (p. 45476) en el segundo curso.

Por último, en la Orden del 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al bachillerato en Andalucía la combinatoria también aparece reflejada dentro el cálculo de probabilidades.

Como hemos visto la presencia de la combinatoria en el currículo español no se encuentra de forma explícita, aunque se tiene en cuenta siempre que tratamos el cálculo de probabilidades y las técnicas de recuento.

En cuanto a lo estándares americanos NCTM (2010) podemos observar que el dominio de probabilidad lo encuentra a partir del grado 6, no apareciendo ninguna idea relacionada con combinatoria hasta el grado 7 donde está el estándar “investigar la probabilidad de un suceso y desarrollar, usar y evaluar los modelos de probabilidad”, aunque aquí también se puede referir a probabilidades sencillas donde el número de casos totales podrían ser evaluados sin utilizar ninguna técnica de combinatoria.

En los grados de 9 a 12, dentro del dominio de Probabilidad condicional y las reglas de probabilidad, encontramos el estándar “uso de las reglas de probabilidad para calcular probabilidades de sucesos en un modelo de probabilidad uniforme” y en un apartado del mismo encontramos por primera vez de forma explícita conceptos de combinatoria “Usar permutaciones y combinaciones para calcular probabilidades de sucesos compuestos y resolver problemas”. Además de cálculos de diferentes probabilidades y problemas relacionados con las mismas.

6. Conclusiones

Teniendo en cuenta las diferentes investigaciones sobre combinatoria en el campo de la psicología, llevadas a cabo por Piaget e Inhelder, así como las realizadas sobre el efecto de la instrucción, podemos concluir con que: los esquemas combinatorios son fundamentales en la formación de ideas de azar y probabilidad; la capacidad combinatoria es un constituyente fundamental del razonamiento formal; el análisis combinatorio expresa un esquema operacional fundamental para el razonamiento lógico; es necesaria la instrucción de las técnicas combinatorias ya que estas no son adquiridas espontáneamente.

Por su parte Kapur también muestra una serie de razones para la enseñanza de la Combinatoria.

El currículo español, sin embargo, no hace referencia explícita a esta parte de las matemáticas, siendo necesarios algunos conceptos de la misma para el cálculo de probabilidades. Los estándares americanos del 2010, si le prestan más atención ya que mencionan el uso de permutaciones y combinaciones.

Referencias

- Batanero C., Godino J. D., Navarro-Pelayo V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Common Core State Standards for Mathematics (2010). Common core state standards initiative.
- Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.*
- Orden del 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria en Andalucía.*
- Orden del 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.*
- REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.*
- REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*
- REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.