

# O jogo MAX\_MIN - Estatístico

*José Marcos Lopes*

## Resumo

Apresentamos neste trabalho um jogo (original) de treinamento para fortalecer os conceitos de Média, Mediana, Moda, Desvio Padrão e Desvio Médio da Estatística Descritiva. As medidas de posição e de dispersão utilizadas em cada rodada são obtidas através de sorteio de fichas apropriadas. Cada ficha, contempla uma medida de posição e uma de dispersão. O material utilizado é composto de 5 dados e 6 fichas. O jogo se completa após 6 rodadas. No início de cada rodada é sorteada uma das fichas. A ficha define quais medidas serão utilizadas naquela rodada. Cada jogador poderá efetuar até três lançamentos em cada rodada. O primeiro lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Posteriormente, o jogador decide se aproveitará ou não seus outros dois lançamentos. Para o segundo lançamento o jogador pode reservar alguns dados e lançar apenas aqueles não reservados. De forma análoga para o terceiro lançamento. Após a finalização da sua jogada, o jogador anota os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para as correspondentes medidas de posição e de dispersão. Ao final de cada rodada o jogador que obteve a maior medida de posição marca dois pontos, o que obteve a segunda maior medida de posição marca 1 ponto, o que obteve a menor medida de dispersão marca 3 pontos, o que obteve a segunda menor medida de dispersão marca 2 pontos e o que obteve a terceira menor medida de dispersão marca 1 ponto. Quando ocorrer empate cada jogador recebe a pontuação correspondente. Após a realização das rodadas cada jogador soma seus pontos e vence aquele que obteve a maior pontuação. Formulamos alguns problemas, envolvendo situações de jogo, que quando resolvidos pelos próprios alunos poderão contribuir com a apreensão destes importantes conceitos da Estatística Descritiva.

**Palavras chave:** Ensino, estatística descritiva, jogos.

## 1. Introdução

Consideramos neste trabalho um jogo de treinamento que pode ser utilizado com alunos do ensino fundamental ou médio com o objetivo de fortalecer o estudo das principais medidas de posição e de dispersão da estatística descritiva. Inicialmente os alunos realizam algumas rodadas do jogo e posteriormente o professor trabalha com os problemas formulados.

Ajudar as crianças e os jovens a compreender progressivamente as ideias estocásticas fundamentais não é tarefa simples. Enquanto a estatística, como ciência, está em um período de notável expansão, o número de investigações sobre o ensino de estatística é ainda escasso, estamos apenas começando a conhecer as principais dificuldades dos alunos nos conceitos mais importantes. É necessário experimentar e avaliar métodos de ensino adaptados a natureza específica da estatística, pois nem sempre se pode transferir os princípios gerais do ensino de matemática. (Batanero, 2000)

Acreditamos que o uso, em sala de aula, do jogo aqui considerado juntamente com os problemas que formulamos, pode contribuir para a apreensão destes importantes conceitos pelos alunos.

## 2. O jogo MAX\_MIN – Estatístico

O jogo MAX\_MIN – Estatístico é um jogo de treinamento para fortalecer os conceitos de Média, Mediana, Moda, Desvio Padrão e Desvio Médio da Estatística Descritiva. O jogo utiliza simultaneamente, em cada rodada, uma medida de posição e uma medida de dispersão. Assim, em cada rodada o jogador deve estabelecer uma estratégia que combina essas duas medidas.

O jogo pode ser disputado por dois ou mais jogadores. O jogo se completa com a realização de seis rodadas. As medidas de posição e de dispersão utilizadas em cada rodada são obtidas através de sorteio de fichas apropriadas. Cada ficha contempla uma medida de posição e uma de dispersão.

### *Material:*

- 5 (cinco) dados honestos, com faces numeradas de 1 a 6;
- 6 fichas que indicam as medidas de posição e de dispersão

Média x Desvio Padrão
-----------------------

Média x Desvio Médio
----------------------

Mediana x Desvio Padrão
-------------------------

Moda x Desvio Padrão
----------------------

Moda x Desvio Médio
---------------------

Mediana x Desvio Médio
------------------------

- Calculadora (opcional)
- Um copo plástico para o lançamento dos dados e uma folha de papel para anotar as pontuações de cada rodada.

### *Regras:*

1. No início de cada rodada é sorteada uma das seis fichas. A ficha define quais medidas serão utilizadas naquela rodada.
2. Cada jogador poderá efetuar até três lançamentos em cada rodada. O primeiro lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Posteriormente, o jogador decide se aproveitará ou não seus outros dois lançamentos. Para o segundo lançamento o jogador pode reservar alguns dados e lançar apenas aqueles não reservados. De forma análoga para o terceiro lançamento. Vale a face de cima dos dados.
3. Após a finalização da sua jogada, o jogador anota em uma folha de papel os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para as correspondentes medidas de posição e de dispersão.
4. Ao final de cada rodada o jogador que obteve a maior medida de posição marca dois pontos, o que obteve a segunda maior medida de posição marca 1 ponto, o que obteve a menor medida de dispersão marca 3 pontos, o que obteve a segunda menor medida de dispersão marca 2 pontos e o que obteve a terceira menor medida de dispersão marca 1 ponto. Quando ocorrer empate cada jogador recebe a pontuação correspondente. Caso o jogador calculou de maneira errada uma das medidas então não marcará pontos naquela rodada.
5. Após a realização das seis rodadas cada jogador soma seus pontos e vence aquele que obteve a maior pontuação.

### *Comentários sobre o jogo*

O jogo MAX\_MIN – Estatístico é uma variante do jogo MEDVAR apresentado em Lopes (2012). O jogo MEDVAR utiliza a média e a variância. Agora, o jogo aqui proposto,

considera as três principais medidas de posição: média, mediana e moda e também as duas principais medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio da estatística descritiva.

Os dados reservados tanto no primeiro como no segundo lançamento não podem ser modificados, ou seja, dado reservado não pode ser utilizado nos lançamentos subsequentes.

A ordem em que cada jogador realiza seus lançamentos pode ser estabelecida em sorteio ou de comum acordo entre os jogadores. Consideramos que mais de quatro jogadores pode tornar o jogo cansativo e desmotivar os participantes.

Como o jogo utiliza dados o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Entretanto, trata-se de um jogo de estratégia. Em cada jogada o jogador deve procurar obter a maior medida de posição, mas também obter a menor medida de dispersão, ou seja, o jogo auxilia na compreensão da variabilidade dos dados de uma amostra, conceito esse fundamental no estudo da Estatística. O jogador deve estabelecer uma estratégia que combine esses dois objetivos: maior medida de posição e menor medida de dispersão.

Uma simulação de jogada pode ser como segue. Suponha que a ficha sorteada foi

Média x Desvio Padrão
-----------------------

O jogador obteve no primeiro lançamento as faces: 3, 3, 3, 4 e 5. Reserva o dado com a face 5 e lança novamente os outros 4 dados e obtém as faces 1, 3, 4 e 6. Reserva o dado com a face 6 e lança novamente os outros três dados obtendo as faces: 1, 1 e 5. Assim, o jogador obteve nesta rodada as faces: 1, 1, 5, 5 e 6 e obteve média igual a 3,6 e desvio padrão igual a 2,15. Caso o jogador tivesse ficado apenas com o seu primeiro lançamento, ou seja, não tivesse utilizado os outros dois lançamentos, então teria obtido a média 3,6 e desvio padrão 0,8. Portanto, neste caso, teria a mesma média, mas um desvio padrão aproximadamente três vezes menor, isto é, uma jogada muito melhor para o jogo MAX\_MIN – Estatístico.

### 3. Situações-problema envolvendo o jogo MAX\_MIN - Estatístico

Apresentamos nesta seção alguns problemas que envolvem situações do jogo MAX\_MIN – Estatístico. O objetivo principal da resolução dessas situações – problema é o de fortalecer e fixar os conceitos presentes nas medidas de posição e de dispersão. Entendemos que o professor pode permitir o uso de calculadoras na resolução dos problemas. Consideramos, neste nível de escolaridade, ser importante saber calcular essas medidas, mas mais importante do que saber calcular é saber interpretar esses conceitos. O jogo aqui proposto exige esse tipo de interpretação quando das escolhas mais adequadas para cada jogada.

Depois de jogadas algumas partidas e da resolução de alguns problemas envolvendo situações de jogo, espera-se que os alunos sejam capazes de perceber que nem sempre será conveniente buscar somente obter os maiores valores possíveis para as faces dos dados. Deve-se procurar estabelecer um equilíbrio entre o maior valor para a medida de posição e o menor valor para a medida de dispersão.

Quando da realização do jogo é conveniente que os alunos anotem suas jogadas, pois isso poderá auxiliá-los na resolução das situações-problema. Estamos supondo que antes da realização do jogo os alunos já tenham estudado, "da forma tradicional", as medidas de posição: média, mediana e moda e também as medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio.

Dado um conjunto de  $n$  valores observados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a *média* (aritmética),  $Me$ , é definida por:

$$Me = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

a *mediana*, Md, é a realização que ocupa a posição central da série de observações quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas em ordem crescente (ou decrescente). Quando o número de observações é par, usa-se como mediana a média aritmética das duas observações centrais. A *moda*, Mo, é definida como a realização mais frequente do conjunto

O desvio padrão, DP, é definido pela raiz positiva da variância, ou seja,

$$DP = \sqrt{\frac{(x_1 - Me)^2 + (x_2 - Me)^2 + \dots + (x_n - Me)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - Me)^2}$$

e o desvio médio, DM, é definido por:

$$DM = \frac{|x_1 - Me| + |x_2 - Me| + \dots + |x_n - Me|}{n}$$

**Problema 1.** Em uma rodada do jogo MAX\_MIN – Estatístico, o Jogador 1 obteve as faces (1, 1, 6, 6, 6), o Jogador 2 obteve as faces (1, 2, 5, 6, 6), o Jogador 3 obteve as faces (1, 3, 4, 6, 6) e o Jogador 4 obteve as faces (2, 3, 4, 5, 6). Supondo que a ficha sorteada foi

Média x Desvio Padrão

qual jogador fez a melhor jogada? Por que?

*Comentários e sugestões.* O Jogador 1 obteve a média  $Me = \frac{1+1+6+6+6}{5} = 4$  e o

desvio padrão  $DP = \sqrt{\frac{(1-4)^2 + (1-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2}{5}} = 2,45$ .

O Jogador 2 obteve a média  $Me = 4$  e o desvio padrão  $DP = 2,10$ . O Jogador 3 obteve a média  $Me = 4$  e o desvio padrão  $DP = 1,90$  e o Jogador 4 obteve a média  $Me = 4$  e o desvio padrão  $DP = 1,41$ .

Portanto, a melhor jogada foi feita pelo Jogador 4, pois todos obtiveram a mesma média e o Jogador 4 obteve o menor valor para o desvio padrão. Neste caso, o Jogador 1 marca 2 pontos pela maior média; o Jogador 2 marca  $2 + 1 = 3$  pontos, sendo 2 pontos pela medida de posição e 1 ponto pela medida de dispersão. De modo análogo, o Jogador 3 marca  $2 + 2 = 4$  pontos e o Jogador 4 marca  $2 + 3 = 5$  pontos.

**Problema 2.** Nas mesmas condições do problema 1, se a ficha sorteada foi:

Média x Desvio Médio

qual jogador fez a melhor jogada? Por que?

*Comentários e sugestões.* Da solução do problema 1 sabemos que os quatro jogadores obtiveram o mesmo valor para a média. Agora, o Jogador 1 obteve o desvio médio

$$DM = \frac{|1-4| + |1-4| + |6-4| + |6-4| + |6-4|}{5} = 2,4$$

O Jogador 2 obteve o desvio Médio  $DM = 2$ ; o Jogador 3 obteve o desvio médio  $DM = 1,6$  e o Jogador 4 obteve o desvio médio  $DM = 1,2$ . Portanto, da mesma forma que no *problema 1*, para o jogo MAX\_MIN – Estatístico a melhor jogada foi feita pelo Jogador 4.

*Problema 3.* No jogo MAX\_MIN – Estatístico as três medidas de posição: média, mediana e moda podem ser iguais? Justificar sua resposta.

*Comentários e sugestões.* A resposta é sim. Um caso possível é quando o jogador obtém as faces (1, 4, 4, 5, 6). Temos neste caso  $Me = Md = Mo = 4$ . Um outro caso, mais trivial, é quando as cinco faces dos dados são iguais, como por exemplo, (3, 3, 3, 3, 3). Neste último caso temos  $Me = Md = Mo = 3$ .

Para o caso geral, quando o conjunto de dados possui uma distribuição simétrica então  $Me = Md = Mo$ . Em uma distribuição assimétrica positiva, observamos a relação  $Me > Md > Mo$  e em uma distribuição assimétrica negativa temos que  $Me < Md < Mo$ .

*Problema 4.* No jogo MAX\_MIN – Estatístico o desvio padrão é sempre maior do que o desvio médio? Justificar sua resposta.

*Comentários e sugestões.* A resposta é não. Para os casos onde o jogador obtenha todas as 5 faces iguais, ou seja, nos casos: (1, 1, 1, 1, 1); (2, 2, 2, 2, 2); (3, 3, 3, 3, 3); (4, 4, 4, 4, 4); (5, 5, 5, 5, 5) e (6, 6, 6, 6, 6) teremos  $DP = DM = 0$ . Assim, o desvio padrão pode ser igual ao desvio médio.

Não só para o jogo MAX\_MIN – Estatístico, como para qualquer conjunto de dados com distribuição fracamente assimétrica temos a relação empírica:  $DM = \frac{4}{5} DP$  (Toledo e Ovalle, 1983, p. 217). Assim, para essas distribuições o desvio padrão (positivo) é sempre maior do que o desvio médio (positivo).

Os problemas a seguir exploram algumas propriedades das medidas de posição e de dispersão. Essas propriedades podem ser obtidas em livros de Estatística Básica, como por exemplo, em Toledo e Ovalle (1983). Na sequência vamos utilizar as notações:  $Me_i$ ,  $Md_i$ ,  $DP_i$  e  $DM_i$  para indicar, respectivamente, os valores da média, da mediana, do desvio padrão e do desvio médio obtidos pelo jogador  $i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

*Problema 5.* Em uma rodada do jogo MAX\_MIN - Estatístico foi sorteada a ficha:

Média x Desvio Padrão .

Supondo que o Jogador 1 obteve as faces (2, 3, 4, 5, 5), o Jogador 2 obteve as faces (3, 4, 5, 6, 6) e o Jogador 3 obteve as faces (1, 2, 3, 4, 4). Quais os valores obtidos por esses jogadores para a média e para o desvio padrão. Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a média e para o desvio padrão? Justificar sua resposta.

*Comentários e sugestões.* Para a média temos neste caso que  $Me_1 = 3,8$ ;  $Me_2 = 4,8$  e  $Me_3 = 2,8$ . Para o desvio padrão temos que  $DP_1 = DP_2 = DP_3 = 1,17$ . É fácil observar que as faces dos dados do jogador 2 são iguais as faces dos dados do jogador 1 adicionadas de 1 e as faces dos dados do jogador 3 são aquelas do jogador 1 subtraídas de 1.

Assim, para o *problema 5* temos as seguintes relações:  $Me_1 = Me_2 - 1 = Me_3 + 1$  e  $DP_1 = DP_2 = DP_3$ . O *problema 5* confirma as duas seguintes propriedades.

- *Propriedade 1.* Somando – se (ou subtraindo – se) um valor constante  $c$  a cada elemento do conjunto de dados, a média fica somada (ou subtraída) por essa constante.

- *Propriedade 1a.* Somando-se (ou subtraindo-se) um valor constante  $c$  a cada elemento do conjunto de dados, o desvio padrão não se altera. Para o caso do *problema 5*, a constante  $c$  é igual a 1.

*Problema 6.* Considerando-se a mesma jogada do *problema 5* e supondo que a ficha sorteada foi

Mediana x Desvio Médio

Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a mediana e para o desvio médio? Justificar sua resposta.

*Comentários e sugestões.* Para a medida de posição mediana temos neste caso que  $Md_1 = 4$ ;  $Md_2 = 5$  e  $Md_3 = 3$ . Para a medida de dispersão desvio médio temos que  $DM_1 = DM_2 = DM_3 = 1,04$ . Da mesma forma que no *problema 5* temos agora as seguintes propriedades.

- *Propriedade 2.* Somando-se (ou subtraindo-se) um valor constante  $c$  a cada elemento do conjunto de dados, a mediana fica somada (ou subtraída) por essa constante.
- *Propriedade 2a.* Somando-se (ou subtraindo-se) um valor constante  $c$  a cada elemento do conjunto de dados, o desvio médio não se altera.

*Problema 7.* Em uma rodada do jogo MAX\_MIN – Estatístico foi sorteada a ficha

Média x Desvio Padrão

Supondo que o Jogador 1 obteve as faces (1, 1, 2, 2, 3) e o Jogador 2 obteve as faces (2, 2, 4, 4, 6). Quais os valores obtidos por esses jogadores para a média e para o desvio padrão? Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a média e para o desvio padrão? Justificar sua resposta.

*Comentários e sugestões.* Para a média temos neste caso que  $Me_1 = 1,8$  e  $Me_2 = 3,6$ . Para o desvio padrão temos que  $DP_1 = 0,748$  e  $DP_2 = 1,496$ . É fácil observar que as faces dos dados do jogador 2 são iguais as faces dos dados do jogador 1 multiplicadas por 2.

Assim, para o *problema 7* temos as seguintes relações:  $Me_2 = 2x Me_1$  e  $DP_2 = 2x DP_1$ . O *problema 7* confirma as duas seguintes propriedades.

- *Propriedade 3.* Multiplicando-se (ou dividindo-se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante  $c$  arbitrária, a média fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.
- *Propriedade 3a.* Multiplicando-se (ou dividindo-se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante  $c$  arbitrária, o desvio padrão fica multiplicado (ou dividido) por essa constante. Para o caso do *problema 7*, a constante  $c$  é igual a 2.

*Problema 8.* Considerando-se a mesma jogada do *problema 7* e supondo que a ficha sorteada foi

Mediana x Desvio Médio

Existe alguma relação entre os valores das faces e os valores obtidos para a mediana e para o desvio médio? Justificar sua resposta.

*Comentários e sugestões.* Para a mediana temos neste caso que  $Md_1 = 2$  e  $Md_2 = 4$ . Para o desvio médio temos neste caso que  $DM_1 = 0,64$  e  $DM_2 = 1,28$ . Observamos assim que neste caso  $Md_2 = 2x Md_1$  e  $DM_2 = 2x DM_1$ . Da mesma forma que no *problema 7* temos agora as duas seguintes propriedades.

- *Propriedade 4.* Multiplicando–se (ou dividindo–se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante  $c$  arbitrária, a mediana fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.
- *Propriedade 4a.* Multiplicando–se (ou dividindo–se) cada elemento do conjunto de dados por uma constante  $c$  arbitrária, o desvio médio fica multiplicado (ou dividido) por essa constante.

Dependendo do interesse do professor, outros problemas envolvendo o jogo MAX\_MIN – Estatístico e outras propriedades das medidas de posição e de dispersão poderão ser formulados. Para um estudo mais avançado pode-se solicitar aos alunos que demonstrem matematicamente, para o caso geral, as propriedades *1, 1a, 2, 2a, 3, 3a, 4, 4a.*

#### 4. Considerações finais

Apresentamos neste trabalho uma proposta de uma situação didática que pode ser utilizada pelo professor dos ensino fundamental ou médio para fortalecer o aprendizado dos conceitos básicos da Estatística Descritiva.

Da mesma forma que para o ensino de Matemática, acreditamos que não existe uma única e melhor forma para se ensinar Estatística, o professor deve conhecer várias alternativas e procedimentos no sentido de motivar e melhorar o conhecimento de seus alunos naquilo que pretende ensinar.

#### Referencias

- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.
- Lopes, J. M. (2012) Uma proposta para o estudo dos conceitos de média e variância. *Encontro anual de professores de matemática-ProfMat2012*, Coimbra. APM.
- Toledo, G. L. y Ovalle, I. I. (1983) *Estatística básica*. São Paulo: Atlas, 459p.